MINISTERE DU REDEPLOIEMENT INDUSTRIEL
ET DU COMMERCE EXTERIEUR

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES
ET DES MINES D'ALES

CONCOURS D'ADMISSION 1986

EPREUVES ECRITES D'ADMISSIBILITE

M A T H E M A T I Q U E S

(Temps accordé : 4 heures)

Les candidats doivent traiter les problèmes I et II qui sont indépendants.

Ces problèmes seront rédigés sur des feuilles de composition séparées :

- *feuille rose pour le problème I*
- *feuille bleue pour le problème II*

Les candidats doivent vérifier que les deux problèmes s'étendent sur 8 pages (y compris celle-ci).

NB : Les copies illisibles ou mal présentées sont corrigées aux risques et périls du candidat.

Les règles à calcul, tables de logarithmes et tables trigonométriques sans formulaire, ainsi que les calculatrices électroniques portatives autonomes non imprimantes sont autorisées.

Toute autre documentation est interdite.

PROBLEME I

On considère l'ensemble des fonctions f_n de la variable réelle x, définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$n \in \mathbb{N},\ f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin t)^n\ e^{x \sin t}\ dt$$

I - On se propose d'étudier la fonction f_0.

1) Pour démontrer que f_0 est dérivable pour x_0 quelconque de $\mathbb{R}$:

a) Montrer en appliquant la formule de Taylor à la fonction u :

$$x \longmapsto u(x) = e^{x \sin t}$$

que pour toute valeur x de $\mathbb{R}$, $t \in [0, 2\pi]$, on a :

$$e^{x \sin t} = e^{x_0 \sin t} + (x - x_0) \sin t \cdot e^{x_0 \sin t} + (x - x_0)\, \alpha(x, t)$$

avec : $|\alpha(x, t)| \leq \frac{1}{2} |x - x_0|\ e^{|x| + |x_0|}$

b) Montrer que pour toute valeur x de $\mathbb{R}$, on a :

$$f_0(x) = f_0(x_0) + (x - x_0) f_1(x_0) + (x - x_0)\, \varepsilon(x)$$

avec : $$|\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{2} |x - x_0| \cdot e^{|x| + |x_0|}$$

Que peut-on en conclure quant à la dérivabilité de f_0 et à sa fonction dérivée ?

2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{ch}(x \sin t)\ dt$$

$$f_1(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin t \cdot \operatorname{sh}(x \sin t)\ dt$$

École Nat. Sup. des techniques indust. et des Mines d'Alès Mathématiques 1986 page 209

b) Démontrer pour $x \geqslant 0$ les inégalités :

$$f_0(x) \geqslant \frac{2}{\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{ch}(x \sin t)\, dt \geqslant \frac{2}{3} \operatorname{ch}\frac{x}{2}$$

$$f_1(x) \geqslant \frac{2}{\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin t \cdot \operatorname{sh}(x \sin t)\, dt \geqslant \frac{1}{3} \operatorname{sh}\frac{x}{2}$$

3) Etudier les variations de f_0 et les branches infinies de sa courbe représentative C (f_0) ; donner l'allure de C (f_0)

II - On se propose de déterminer le développement limité de f_0 à l'ordre p au voisinage de 0.

1) Déterminer une relation de récurrence liant f_n (0) et f_{n-2} (0) pour $n \geqslant 2$; en déduire f_n (0) suivant la parité de n.

2) Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée. (On pourra utiliser les résultats de I, 1).

3) Montrer que f_0 admet un développement limité à l'ordre p au voisinage de 0 et expliciter ce développement.

III - I est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$.

On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) sur I, c'est-à-dire de déterminer l'ensemble des fonctions définies, deux fois dérivables, sur I vérifiant (E).

$$xy'' + y' - xy = 0 \quad (E)$$

1) Montrer : $x f_2(x) + f_1(x) - x f_0(x) = 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

En déduire que f_0 est solution de E sur I.

2) Montrer que, si f et g sont deux solutions de (E) sur I, la fonction d telle que : $d = f g' - g f'$ vérifie : $\forall x \in I,\ x\, d'(x) + d(x) = 0$

Résoudre sur I l'équation différentielle (E') : $xy' + y = 0$

3) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur I.

(On pourra appeler ϕ une fonction primitive de $\varphi : \varphi(x) = \dfrac{1}{x\, f_0^2(x)}$, $x \in I$).

Tournez la page S. V. P.

page 210 1986 École Nat. Sup. des techniques indust. et des Mines d'Ales
Mathématiques

PROBLEME II

Soit r un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note J_r l'ensemble des entiers naturels {1, 2, ..., r}.

On désigne par E_r l'ensemble des matrices carrées d'ordre r du type $M = (a_{ij})$ (i indice de ligne ; j indice de colonne) telles que :

$$\forall\ (i,\ j) \in J_r^2 \qquad a_{ij} \in [0,\ 1] \quad \text{et} \quad \forall i \in J_r \qquad \sum_{j=1}^{r} a_{ij} = 1.$$

De plus on pose : $\forall\ M \in E_r$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M^{n+1} = M^n \times M$ et $M^n = (p_{ij}^{(n)})$.

On a donc $p_{ij}^{(1)} = a_{ij}$. Si pour tout $(i, j) \in J_r^2$, $p_{ij}^{(n)}$ a une limite finie α_{ij} quand n tend vers l'infini on dira que M^n a une limite L et on notera

$$\lim_{n \to +\infty} M^n = L = (\alpha_{ij}).$$

$\tilde{E}_r$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de E_r.

Première partie :

1) Montrer que $\tilde{E}_2$ est stable pour la multiplication matricielle.

2) On pose $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^* \qquad A^n = \begin{pmatrix} p_{11}^{(n)} & 1-p_{11}^{(n)} \\ 1-p_{22}^{(n)} & p_{22}^{(n)} \end{pmatrix}$$

a) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que :

$$A^2 = a\,A + b\,I$$

b) En déduire que les suites $\left(p_{11}^{(n)}\right)$ et $\left(p_{22}^{(n)}\right)$ sont solutions de l'équation de récurrence $u_n = a\,u_{n-1} + b\,u_{n-2}$.

c) Résoudre cette équation et calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

d) Montrer que A^n admet une limite A_0 quand n tend vers l'infini et que l'on peut écrire : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = A_0 + \mu_1^n\ A_1$ où μ_1 est un réel tel que : $0 < \mu_1 < 1$
A_1 étant une matrice carrée d'ordre 2 à éléments constants.

On vérifiera que $A_0 = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in [0, 1]$ tel que :

$$(\alpha \quad 1-\alpha) = (\alpha \quad 1-\alpha) \times A$$

Deuxième partie :

Soit M un élément de $\tilde{E}_r$, on pose $\varphi_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_r)$ (det désigne le déterminant) où I_r est la matrice unité d'ordre r, et λ élément de $\mathbb{C}$.
On désigne par $S_r(M)$ l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\varphi_M(\lambda) = 0$.

Soit B élément de $\tilde{E}_3$ tel que $B = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{4}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$

1) Montrer que $S_3(B)$ admet trois éléments réels distincts $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1$.

2) Pour i = 1, 2 ou 3 on note $D_{\lambda_i} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 ; f(\vec{x}) = \lambda_i \vec{x} \}$ où f désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni de sa base canonique) de matrice associée B.

a) Montrer que, pour i = 1, 2 ou 3 , D_{λ_i} est une droite vectorielle, dirigée par $\vec{x}_i$ dont on déterminera les composantes dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (on prendra la 3ème composante de $\vec{x}_i$ égale à 1).

b) Montrer que $(\vec{x}_1 , \vec{x}_2 , \vec{x}_3)$ définit une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$.

c) Ecrire la matrice B' relative à f par rapport à cette nouvelle base. Déterminer la matrice P de changement de base ainsi que son inverse P^{-1}.

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer B'^n; en déduire le calcul de B^n. Montrer que B^n admet une limite quand n tend vers l'infini et la calculer.

Troisième partie :

1) Montrer que $1 \in S_r(M)$ et que $0 \notin S_r(M)$ pour M élément quelconque de $\tilde{E}_r$.

2) A cette matrice M on associe l'endomorphisme f de $\mathbb{C}^r$ (espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ muni de sa base canonique). Soit λ élément de $S_r(M)$; montrer qu'il existe $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ élément non nul de $\mathbb{C}^r$ tel que $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. On pose $R = |x_k|$ le plus grand des modules $|x_1|$, $|x_2|$ ..... $|x_r|$. Montrer que : $\forall \lambda \in S_r(M) \quad 0 < |\lambda| \leq 1$.

3) On note $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots$, les éléments distincts de $S_r(M)$ et on admet la formule suivante :

$$\forall M \in \tilde{E}_r ; \forall n \in \mathbb{N}^* : M^n = B_0 + \sum_{i \in I'} \lambda_i^n B_i + \sum_{i \in I''} \lambda_i^n C_i(n)$$

avec $\lambda_0 = 1$
I' est l'ensemble des indices non nuls des λ_i éléments de $S_r(M)$ tels que $|\lambda_i| = 1$
I'' est l'ensemble des indices i des éléments de $S_r(M)$ tels que $|\lambda_i| < 1$.
B_0 est élément de E_r.
les matrices B_i sont à éléments constants
les matrices $C_i(n)$ sont à éléments polynômiaux en n de degré borné.

a) Déduire de la formule précédente que, si 1 est le seul élément de $S_r(M)$ de module 1, alors M^n a pour limite B_0 quand n tend vers l'infini.

b) Retrouver par cette formule la limite de B^n (B définie dans la 2ème partie) quand n tend vers l'infini sachant que dans ce cas B_0 est de la forme :

$$B_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} \text{ avec } (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3) = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3) \times B$$

Vérifier que $B_0^2 = B_0$

c) Etudier le comportement de C^n quand n tend vers l'infini.

$$\text{avec } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer $S_4(C)$.

d) Que peut-on dire du comportement de M^n s'il existe des éléments de $S_r(M)$ de module 1 autre que 1 lui-même sachant que ceux-ci sont des racines de l'unité ?

Page 212 1986 Ecole Nat. Sup. des techniques indust. et des Mines d'Ales
Mathématiques